А. Ф. Галимянов (Казань)

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ДРОБНОГО ИНТЕГРАЛА

Построены и исследованы квадратурные формулы (к.ф.) для сингулярного интеграла

$$S(f,x) \equiv \int_a^b \frac{f(t)}{t-x}\,dt, \quad x \in (a,b), \tag{1}$$

понимаемого в смысле главного значения по Коши-Лебегу. В отличие от обычных квадратурных формул, они используют значения дробного интеграла Римана-Лиувилля в узлах:

$$S(f,x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(x) I_{a+}^{\alpha}(f, x_k) + R_n(f). \tag{2}$$

Здесь $A_k(x) \in C[a,b]$ и соответственно $x_k \quad (k = \overline{0,n})$ — коэффициенты и узлы, $R_n(f)$ — остаточный член, $I_{a+}^{\alpha}(f,x)$ — левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля от функции f в точке x, где $\alpha \in [0,1]$. При $\alpha = 0$ получаются обычные, а при $\alpha = 1$ — так называемые интервальные квадратурные формулы.

Квадратурные формулы вида (2) строятся различными способами. Опишем один из них. Пусть $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, \quad k = \overline{0,n}$, а P_n^{α} — проекционный полиномиальный оператор, ранга не выше $n+1$, удовлетворяющий условиям $I_{a+}^{\alpha}(P_n^{\alpha}(\varphi,t), x_k) = I_{a+}^{\alpha}(\varphi, x_k), \quad k = \overline{0,n}, \varphi(t) \in C[a,b]$. Положим

$$S(f,x) = S(P_n^{\alpha}(f,t), x) + R_n(f) \tag{3}$$

На основании результатов [1], главы 3, доказывается

Теорема. *Пусть $f(t) \in H_{\omega}^{r}, r \geq 0$, где при $r = 0$ выполняется усиленное условие Дини-Липшица. Тогда к.ф. (3) сходится равномерно со скоростью*

$$\|R_n(f)\|_{C[a,b]} = O\left(\frac{ln^2 n}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{4}$$

Квадратурные формулы (2) используются при приближенном решении интегральных уравнений, в которых неизвестная функция находится под знаками сингулярного, а также дробного интегралов. Предложено теоретическое обоснование указанного квадратурного метода решения различных классов интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.

Р. М. Ганеев (Елабуга)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОШИ И ДАРБУ ДЛЯ ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе получены общие решения следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y^2 u_x + v_y + av = 0, \\ v_x + u_y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $|a| < 1$. Единственное регулярное решение задачи Коши получено в явной форме, а единственное обобщенное решение задачи Дарбу выражено через некоторое решение уравнения Эйлера.

В [1], [2] рассматривались задачи Коши, Гурса, Коши-Гурса для системы

$$\begin{cases} y^\kappa u_x - v_y = a_1(x,y)u + b_1(x,y)v + f(x,y), \\ u_x + v_x = a_2(x,y)u + b_2(x,y)v + g(x,y), \end{cases}$$

где $0 < \kappa < 2$.

В [3] из (1) выведено уравнение второго порядка и для него исследуются вопросы существования и единственности решения задачи Дарбу в зависимости от a.